MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures 1988

Le but de ce problème est de donner une méthode pour calculer certaines intégrales du type $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{|P(x)|}}$, où $P(x)$ est un polynôme de degré 6 à coefficients réels.

On note $\mathbf{R}[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes d'une variable à coefficients réels, E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$.

Si $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont $n+1$ éléments de E_n, on note $\Delta_n(P_0, \ldots, P_n)$ leur déterminant dans la base $1, X, \ldots, X^n$. Pour $n = 2$, on pose $\Delta(P_0, P_1, P_2) = \Delta_2(P_0, P_1, P_2)$.

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$, on note $[P, Q]$ le polynôme $P'Q - PQ'$.

Par ailleurs, à tout triplet (P, Q, R) d'éléments de $\mathbf{R}[X]$, on associe le triplet (U, V, W) tel que $U = [Q, R], \quad V = [R, P], \quad W = [P, Q]$.

On dira dans la suite que (U, V, W) est le *triplet associé* au triplet (P, Q, R).

Partie *I*.

$I - 1 - a$. Pour P fixé dans $\mathbf{R}[X]$, déterminer le noyau de l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par $Q \longmapsto [P, Q]$.

$I - 1 - b$. Montrer que si deux polynômes P et Q ont une racine commune, cette racine est racine au moins double de $[P, Q]$.

$I - 2$. Soient P et Q deux polynômes de E_2.

$I - 2 - a$. Montrer que $[P, Q] \in E_2$.

$I - 2 - b$. On suppose que $P(X) = (X - x)(X - x')$; si l'on écrit $[P, Q]$ sous la forme $aX^2 + bX + c$, donner une expression simple de $b^2 - 4ac$ en fonction de $Q(x)$ et $Q(x')$.

$I - 3$. Soient P et Q deux éléments non nuls de E_2. On suppose que P (resp. Q) a deux racines réelles $a < a'$ (resp. $b < b'$), et que $a' < b$. Montrer que $[P, Q]$ a deux racines réelles distinctes. Les placer par rapport à a, a', b, b'.

Partie *II*.

$II - 1$. Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $n+1$ éléments de E_n. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} P_0(x) & P_0'(x) & \ldots & P_0^{(n-1)}(x) & P_0(z) \\ P_1(x) & P_1'(x) & \ldots & P_1^{(n-1)}(x) & P_1(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_n(x) & P_n'(x) & \ldots & P_n^{(n-1)}(x) & P_n(z) \end{vmatrix},$$

en fonction de n, x, z et $\Delta_n(P_0, \ldots, P_n)$.

$II - 2$. En déduire que, pour tout triplet (P, Q, R) d'éléments de E_2, on a, pour tout couple de réels (x, z):

$$P(x)U(z) + Q(x)V(z) + R(x)W(z) + (x - z)^2\Delta(P, Q, R) = 0,$$

où (U, V, W) est le triplet associé à (P, Q, R).

$II - 3$. Soient P, Q, R trois éléments de E_2, (U, V, W) le triplet associé à (P, Q, R), et A la matrice

$$\begin{pmatrix} P(x) & P'(x) & P''(x) \\ Q(x) & Q'(x) & Q''(x) \\ R(x) & R'(x) & R''(x) \end{pmatrix}.$$

Donner une expression simple de la matrice des cofacteurs de A en fonction des polynômes U, V, W et de leurs dérivées successives, puis exprimer $[U, V]$, $[V, W]$, $[W, U]$ et $\Delta(U, V, W)$ en fonction de P, Q, R et $\Delta(P, Q, R)$.

(On rappelle que, si A est une matrice carrée et B la matrice transposée de la matrice des cofacteurs de A, on a $AB = BA = \det(A)I$, où I est la matrice identité.)

Tournez la page S. V. P.

Partie *III*.

Soient P, Q, R trois polynômes non nuls de E_2, et (U, V, W) le triplet associé à (P, Q, R). On suppose que P (resp. Q, resp. R) a deux racines réelles a, a' (resp. b, b', resp. c, c'), telles que $a < a' < b < b' < c < c'$.

D'après $I-3$, U (resp. V, resp. W) a deux racines réelles distinctes que l'on note u, u' (avec $u < u'$), (resp. v, v', avec $v < v'$, resp. w, w', avec $w < w'$).

III – 1. Montrer que $\Delta(P, Q, R)$ est non nul.

III – 2 – *a*. Trouver une relation polynomiale reliant w, w', a, a', b, b'. (On pourra utiliser la question $I-2-b$.)

III – 2 – *b*. Trouver une relation polynomiale reliant a, a', v, v', w, w'.

III – 3. Montrer que les 6 racines u, u', v, v', w, w' de UVW sont distinctes. Les ordonner par ordre croissant, et les placer par rapport à a, a', b, b', c, c'.

III–4. Posons $F(x, z) = P(x)U(z)+Q(x)V(z)$. On peut écrire F comme un polynôme du second degré en z:

$$\varphi_0(x)z^2 + \varphi_1(x)z + \varphi_2(x),$$

où φ_0, φ_1 et φ_2 sont des polynômes en x de degré ≤ 2.

Placer les racines de φ_0 et du discriminant $\varphi_1^2 - 4\varphi_0\varphi_2$ par rapport à a, a', b, b', c, c'.

III – 5. En déduire qu'il existe deux fonctions distinctes $x \mapsto z_1(x)$ et $x \mapsto z_2(x)$ de $[a, a']$ dans $\mathbf{R}$, continues sur $[a, a']$, C^∞ sur $]a, a'[$, telles que $F(x, z_1(x)) = F(x, z_2(x)) = 0$,

pour tout $x \in [a, a']$.

Tracer le tableau de variations de z_1 et z_2.

III – 6. Pour $x \in]a, a'[$, on pose

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{|P(x)Q(x)R(x)|}, \\ y_1(x) &= \frac{P(x)U(z_1(x))(x - z_1(x))}{y(x)}, \\ y_2(x) &= \frac{P(x)U(z_2(x))(x - z_2(x))}{y(x)}. \end{aligned}$$

III – 6 – *a*. Calculer y_1^2 et y_2^2 en fonction de U, V, W, z_1, z_2 et $\Delta(P, Q, R)$. Etudier le signe de y_1 et y_2 sur $]a, a'[$.

III – 6 – *b*. Calculer

$$U'(z_1(x))\frac{z_1'(x)}{y_1(x)} + U'(z_2(x))\frac{z_2'(x)}{y_2(x)} \quad \text{et} \quad V'(z_1(x))\frac{z_1'(x)}{y_1(x)} + V'(z_2(x))\frac{z_2'(x)}{y_2(x)}$$

en fonction de $U'(x)$, $V'(x)$, et $y(x)$.

(On pourra remarquer que, pour tout $x \in [a, a']$, on a l'égalité (entre polynômes en X)

$$F(x, X) = \varphi_0(x)(X - z_1(x))(X - z_2(x)), \tag{1}$$

prendre la dérivée logarithmique de cette identité par rapport à x, puis décomposer en éléments simples $\frac{U'(z)}{U(z)(z-x)}$.)

On notera que le résultat dépend du signe de $\Delta(P, Q, R)$.

III – 7. Pour tout polynôme $S \in E_1$, exprimer alors

$$\int_a^{a'} S(x)\frac{dx}{\sqrt{|P(x)Q(x)R(x)|}}$$

en fonction de $\Delta(P, Q, R)$ et de

$$\int_v^w S(x)\frac{dx}{\sqrt{|U(x)V(x)W(x)|}}.$$

Tournez la page S. V. P.

Partie *IV*.

Soient à présent six nombres réels $a_1 < a'_1 < b_1 < b'_1 < c_1 < c'_1$. Posons

$$P_1 = (X - a_1)(X - a'_1),\ \ Q_1 = (X - b_1)(X - b'_1),\ \ R_1 = (X - c_1)(X - c'_1).$$

Si (U_1, V_1, W_1) est le triplet associé à (P_1, Q_1, R_1), on a vu précédemment que les racines de $U_1V_1W_1$ sont toutes réelles. Ordonnons-les par ordre croissant $a_2 < a'_2 < b_2 < b'_2 < c_2 < c'_2$, et posons $P_2(X) = (X - a_2)(X - a'_2)$, $Q_2(X) = (X - b_2)(X - b'_2)$, $R_2(X) = (X - c_2)(X - c'_2)$.

En itérant ce procédé, on définit par récurrence, pour $n \geq 2$, six suites de polynômes $P_n, Q_n, R_n, U_n, V_n, W_n$ et six suites de nombres réels $(a_n), (a'_n), (b_n), (b'_n), (c_n), (c'_n)$, vérifiant les relations

$$P_n(X) = (X - a_n)(X - a'_n),\ \ Q_n(X) = (X - b_n)(X - b'_n),\ \ R_n(X) = (X - c_n)(X - c'_n),$$

où $a_n < a'_n < b_n < b'_n < c_n < c'_n$ sont les racines de $U_{n-1}V_{n-1}W_{n-1}$, $(U_{n-1}, V_{n-1}, W_{n-1})$ étant le triplet associé à $(P_{n-1}, Q_{n-1}, R_{n-1})$.

IV − 1. Montrer, en utilisant *III* − 2 − *a*, que les suites (a_n) et (a'_n) (resp. (b_n) et (b'_n), resp. (c_n) et (c'_n)) sont adjacentes. On note $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$, $c = \lim_{n\to+\infty} c_n$ leurs limites respectives.

Montrer, en utilisant *III* − 2 − *b*, qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}(a'_{n+1} - a_{n+1}) &< M(a'_n - a_n)^2,\\ (b'_{n+1} - b_{n+1}) &< M(b'_n - b_n)^2,\\ (c'_{n+1} - c_{n+1}) &< M(c'_n - c_n)^2.\end{aligned}$$

IV − 2. Soit $P \in E_1$. Montrer que la suite qui à $n \geq 1$ associe

$$I_n = \int_{a_n}^{a'_n} P(x)\frac{dx}{\sqrt{|\,P_n(x)Q_n(x)R_n(x)\,|}}$$

est convergente. Calculer sa limite en fonction de a, b, c.

IV − 3. Soit (t_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $t_n = I_n/I_{n+1}$.

IV − 3 − *a*. Exprimer t_n en fonction de $\Delta(P_n, Q_n, R_n)$ et de $a_n, a'_n, b_n, b'_n, c_n, c'_n$.

IV − 3 − *b*. Montrer que la suite $T_n = \prod_{k=1}^{n} t_k$ converge. Soit T sa limite. Si $P \in E_1$, exprimer $I_1 = \int_{a_1}^{a'_1} P(x)\frac{dx}{\sqrt{|\,P_1(x)Q_1(x)R_1(x)\,|}}$ en fonction de T, P et a, b, c.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail